Tentamen Discrete Structuren

vrijdag 22 januari 1999, 14 - 17 uur

Wie voor toets 1 een voldoende ($5\frac{1}{2}$ of hoger) heeft gehaald, is vrijgesteld van opgave 1, 2 en 3; wie voor toets 2 een voldoende heeft gehaald, is vrijgesteld van opgave 4, 5 en 6.
Als je een toets gehaald hebt en toch de bijbehorende opgaven maakt, dan telt het beste resultaat bij de berekening van het tentamencijfer.

Voor alle opgaven geldt: **beargumenteer je antwoorden**.

1. a. Geef de definitie van het begrip *boom* in termen van ingraad.
   b. Bewijs dat een boom geen gerichte cykel bevat.

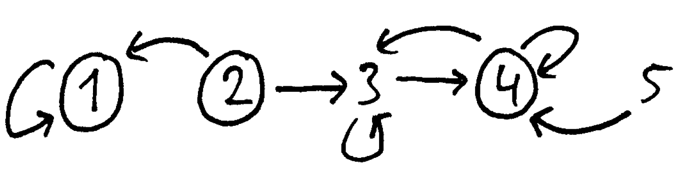
2. Bewijs met volledige inductie:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3 - n}{3}.$$

3. Laat X de machtsverzameling van $\{0,1,2\}$ zijn.
   a. Geef een expliciete definitie van X.
   b. In X definiëren we de relatie R door xRy als $1 \in (x \cap y)$. Bepaal de matrix van de relatie R.
   c. Ga na of de relatie R uit onderdeel b een functie is.

4. Zij φ gedefinieerd door $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$.
   a. Geef de waarheidstabel van φ.
   b. Zet φ via een geannoteerd lineair bewijs om in disjunctieve normaalvorm.

5. Zij gegeven het volgende model:



Het eenplaatsige predikaatsymbool P wordt hierin geïnterpreteerd door de omcirkelde punten, het tweeplaatsige predikaatsymbool R door de pijlen. Geef van de volgende formules aan of zij waar zijn in dit model.
a. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x,x))$
b. $\forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(y))$

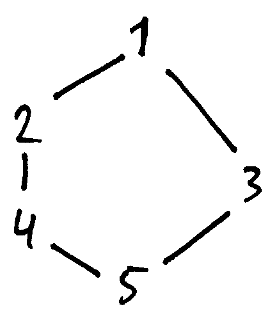
6. a. Laat zien dat $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ niet algemeen geldig is.
b. Bewijs $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \forall x P(x))$ mbv. een geannoteerd lineair bewijs (x komt niet vrij voor in Q).

7. a. Geef de definities van de begrippen *distributief tralie* en *Boole-algebra.*
b. Toon aan dat een distributief tralie hoogstens één nul-element heeft.

8. Zij $X = \{1, \ldots, 10\}, R = \{(x, y) \in X^2 \mid y = x + 3\}$.
a. Bepaal R^0, R^2, R^+, R^*.
b. Voor welke $n \in \mathbf{N}$ geldt $R^n = \emptyset$? Beredeneer je antwoord.

9. Welke van de volgende relaties R op $\mathbf{N}$ zijn equivalentie-relaties? Geef, in geval van een equivalentie-relatie, de equivalentieklassen aan.
a. mRn als er een priemgetal is dat zowel m als n deelt.
b. mRn als $\lfloor m/2 \rfloor = \lfloor n/2 \rfloor$.
c. mRn als $\lfloor (m - n)/2 \rfloor = 1$.

10. Het Hasse-diagram van de partieel geordende verzameling $(X, \sqsubseteq)$ ziet er als volgt uit:



We definiëren de operaties $\sqcap$ en $\sqcup$ door

$$x \sqcap y = inf(x, y), \quad x \sqcup y = sup(x, y)$$

a. Geef $\sqcap$ en $\sqcup$ in een tabel weer.
b. Laat zien dat de absorptie-eigenschap $x \sqcup (x \sqcap y) = x$ geldt.
c. Laat zien dat de distributie-eigenschap $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$ *niet* geldt.

naam	*equivalentie*	
commutativiteit	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$
associativiteit	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
distributiviteit	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
idempotentie	$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$
absorptie	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$
$\top$-eigenschappen	$\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \top$
	$\varphi \cancel{\wedge} \top \Leftrightarrow \top$	$\neg\top \Leftrightarrow \bot$
$\bot$-eigenschappen	$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi \Leftrightarrow \bot$
	$\varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$	$\neg\bot \Leftrightarrow \top$
dubbele negatie	$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$	
De Morgan	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
implicatie-eliminatie	$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$	
equivalentie-eliminatie	$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	

distributiviteit	$\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi)$
	$\exists x\, (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi)$
dualiteit	$\exists x\, \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg\varphi$
loze universele kwantificatie	$\forall x\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$ mits x niet vrij is in φ
loze existentiële kwantificatie	$\exists x\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$ mits x niet vrij is in φ
herbenoemen variabelen	$\forall x\, \varphi \Leftrightarrow \forall y\, [y/x]\varphi$
	als y niet in φ voorkomt
verwisselen kwantoren	$\forall x\, \forall y\, \varphi \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, \varphi$
	$\exists x\, \exists y\, \varphi \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, \varphi$

naam	*gevolg*
ex falso	$\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi$
modus ponens	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$
contrapositie	$\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
reductio ad absurdum	als $\varphi, \neg\psi \Rightarrow \bot$, dan $\varphi \Rightarrow \psi$
conjunctie-introductie	$\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$
conjunctie-eliminatie	$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$

gedeeltelijke distributiviteit	$\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi \Rightarrow \forall x\, (\varphi \vee \psi)$
	$\exists x\, (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$
	$\forall x\, (\varphi \vee \psi) \Rightarrow \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$
	als x niet vrij is in φ of ψ
	$\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi \Rightarrow \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$
	als x niet vrij is in φ of ψ
instantiatie	$\forall x\, \varphi \Rightarrow [t/x]\varphi$
	als t substitueerbaar is voor x in φ
existentiële generalisatie	$[t/x]\varphi \Rightarrow \exists x\, \varphi$
	als t substitueerbaar is voor x in φ
verwisselen kwantoren	$\exists x\, \forall y\, \varphi \Rightarrow \forall y\, \exists x\, \varphi$